MATEMÁTICA

Gabarito Final - Questão 1

Sejam:
D = diagonal do cubo;
d = diagonal da face do cubo;
a = aresta do cubo

Cálculo do valor da aresta do cubo (*a*):

Usando o Teorema de Pitagóras: $D^2 = d^2 + a^2$
Como foi dado $D^2 = d^2 + 16$, vem que $a^2 = 16$, Considerando apenas o valor positivo, resulta em $a = 4\ m.$

Cálculo do raio da base do poste cilíndrico (*r*):

Segundo os dados tem-se que: $2\,r = a/2$. Logo, $2r= 4/2 \rightarrow r =1\ m.$

Cálculo da altura do poste cilíndrico (*h*):

Segundo os dados tem-se que:
$V_{poste} = 18\ \text{m}^3 \rightarrow 18 = \pi\, r^2\, h$
$18 = \pi\,(1^2)\, h \rightarrow$ h= $(18/\pi)\ m.$

Cálculo da área do poste cilíndrico (*A*) a ser pintada:

$A = A_{lateral} + A_{face\ superior} \rightarrow A = 2\,\pi\, r\, h + \pi\, r^2$
$A = 2\,\pi\,(1)\,(18/\pi) + \pi\,(1^2) \rightarrow A= (36 + \pi)\ m^2.$

Cálculo do raio máximo possível para a esfera metálica (*R*):

Tem-se que 1 m^3 da liga metálica corresponde a 300 *kg* e que a haste metálica suporta no máximo 50 *kg,* logo o volume da esfera deve ser:

$V_{esf} \leq (50/\ 300)\ m^3$
$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\frac{4}{3}\pi R^3 \leq (1/6) \rightarrow R \leq \sqrt[3]{\frac{1}{8\pi}}\ m$

Gabarito Final - Questão 2

Alternativa A: Determinando os pontos A, B e C:
Intersecção da reta r com o círculo S:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x^2 = 5$$
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = 2 \ \text{ e } \ y = -2 \Rightarrow (1{,}2) \ \text{ e } \ (-1{,}-2)$$

Intersecção da reta h com o círculo S:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 5$$
$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -2$$

$$y = 2 \ \text{ e } \ y = -1 \Rightarrow (1{,}2) \ \text{ e } \ (-2{,}-1)$$

Como $r \cap h \cap S = \{A\} \Rightarrow A(1{,}2)$
Logo as coordenadas dos pontos A, B e C são: $A(1{,}2)$, $B(-1{,}-2)$ e $C(-2{,}-1)$.

Observação: Outro modo de determinar as coordenadas do ponto A é pela intersecção das retas r e h:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$2x = x + 1$$
$$x = 1$$

y = 1 +1= 2

$$\therefore A(1{,}2)$$

B) Cálculo da Área do triângulo ABC:

Seja a matriz D dada por: $D = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \left|\det D\right| = \frac{1}{2} \times \left|\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2} \times \left|-6\right| = \frac{1}{2} \times 6 = 3\,u.a\,.$$

Gabarito Final - Questão 3

Primeira Resolução:

Como (1, 15) e (3, 9) pertencem ao gráfico da função f(x), temos que: f(1) = a + b + c = 15; f(3) = 3^2 a + 3 b + c = 9a + 3b + c = 9. Como a, b, c formam uma progressão aritmética, temos que: a + c = 2 b. Então, obtemos o sistema:

$$a + b + c = 15 \qquad \textbf{(1)}$$
$$9a + 3b + c = 9 \qquad \textbf{(2)}$$
$$a + c = 2b \qquad \textbf{(3)}$$

Substituindo (3) em (1), temos que:

$$2b + b = 15 \qquad \textbf{(4)}$$
$$3b = 15$$
$$\mathbf{b = 5} \qquad \textbf{(5)}$$

De (3) e (5), temos que:

$$a + c = 10$$
$$c = 10 - a \qquad \textbf{(6)}$$

Substituindo (5) e (6) em (2), temos que:

$$9a + 3.5 + 10 - a = 9 \qquad \textbf{(7)}$$
$$8a + 25 = 9$$
$$8a = -16 \qquad \textbf{(8)}$$
$$\mathbf{a = -2} \qquad \textbf{(9)}$$

Substituindo (9) em (6), temos que:

$$c = 10 - (-2) \qquad \textbf{(10)}$$
$$\mathbf{c = 12} \qquad \textbf{(11)}$$

Consequentemente,

$$\mathbf{f(x) = -2\,x^2 + 5\,x + 12}.$$

Procuraremos as raízes da equação:

$$-2\,x^2 + 5\,x + 12 = 0$$

Temos que:

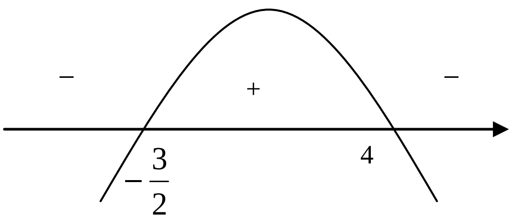
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5.5 - 4.(-2).12}}{2.(-2)} \qquad \textbf{(12)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{-4} = \frac{-5 \pm 11}{-4} \qquad \textbf{(13)}$$

$$\mathbf{x_1} \ \mathbf{=} \ \frac{-5+11}{-4} \ \mathbf{=} -\frac{3}{2} \qquad \textbf{(14)}$$

$$\mathbf{x_2} = \frac{-5-11}{-4} = \mathbf{4} \qquad \textbf{(15)}$$

Estudo do sinal:



Portanto, f(x) > 0 se, e somente se,

$$\mathbf{x} \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right) \qquad \textbf{(16)}$$

Então, os valores dos números inteiros x tais que f(x) > 0 são:

{-1, 0, 1, 2, 3} **(17)**

(**Fim da Primeira Resolução**)

Segunda Resolução: De f(1) = 15, e f(3) = 9, temos que:

a + b + c = 15 **(1)**
9a + 3b + c = 9 **(2)**

Como a, b, c formam uma progressão aritmética, {a, b, c} são de forma:

{b – r, b, b + r} **(3)**

Substituindo (3) em (1), temos que:

(b – r) + b + (b + r) = 15 **(4)**
3b = 15
b = 5 **(5)**

Substituindo (3) e (5) em (2), temos que:

9(5 – r) + 3.5 + (5 + r) = 9 **(6)**
65 – 8r = 9
-8r = -56
r = 7 **(7)**

De (3), (5) e (7), temos que:

a = b – r = 5 – 7 **(8)**
a = -2 **(9)**
c = b + r = 5 + 7 **(10)**
c = 12 **(11)**

O restante é o mesmo da Primeira Resolução.

Gabarito Final - Questão 4

A) Na formação das equipes a ordem dos consultores não é importante, logo o número de possibilidades na formação das mesmas é dado pelo produto das combinações das equipes júnior e sênior

1) Equipes júnior

$$C_{10,3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

2) Equipes sênior

$$C_{5,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Cálculo do número de equipes

$$C_{10,3} \times C_{5,2} = 120 \times 10 = 1200$$

B) A probabilidade de que nenhuma marca apresente problema é dada pelo complementar da probabilidade da união com computadores defeituosos.

1) Cálculo da probabilidade da união dos defeituosos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} = \frac{74}{100} = \frac{37}{50}$$

2) Cálculo do complementar

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{37}{50} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50} = 26\%$$