



**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
VESTIBULAR 2009**

Matemática

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
\mathbb{R} : conjunto dos números reais	$ z $: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
\mathbb{C} : conjunto dos números complexos	$\operatorname{Re} z$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$	$\operatorname{Im} z$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < +\infty\}$	$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$	A^t : transposta da matriz A
A^C : complementar do conjunto A	$\det A$: determinante da matriz A

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

\overline{AB} : segmento de reta unindo os pontos A e B

$\operatorname{tr} A$: soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada A

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \setminus B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

- A () 0. B () 1. C () 2. D () 4. E () 8.

Questão 2. Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor “flex“ (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor “flex“ sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicomustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

- A () 246. B () 252. C () 260. D () 268. E () 284.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$$f(x + y) = f(x) f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } f(x) \neq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Das afirmações:

- I. f pode ser ímpar.
- II. $f(0) = 1$.
- III. f é injetiva.
- IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

- A () I e III. B () II e III. C () I e IV. D () IV. E () I.

Questão 4. Se $a = \cos \frac{\pi}{5}$ e $b = \sin \frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

- A () $a + bi$. B () $-a + bi$. C () $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.
D () $a - bi$. E () $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

Questão 5. O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

- A () $3 + \sqrt{3}$. B () $2 + 3\sqrt{3}$. C () $2 + \sqrt{2}$. D () $1 + 2\sqrt{2}$. E () $2 + 2\sqrt{2}$.

Questão 6. Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

- A () 1. B () 2. C () 3. D () 4. E () 5.

Questão 7. Suponha que os coeficientes reais a e b da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

- I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.
II. As raízes podem ser duplas.
III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
D () apenas II e III. E () nenhuma.

Questão 8. Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a

- A () -3 . B () $-\frac{1}{3}$. C () $\frac{1}{3}$. D () 1. E () 3.

Questão 9. Dados $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t(AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

- A () $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. B () $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. C () $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. D () $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. E () $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Questão 10. O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

- A () determinado.
- B () determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
- C () determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
- D () impossível.
- E () indeterminado.

Questão 11. Seja $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $\text{tr}A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

- A () $\frac{101}{25}$.
- B () $\frac{121}{25}$.
- C () 5.
- D () $\frac{49}{9}$.
- E () $\frac{25}{4}$.

Questão 12. Um certo exame de inglês é utilizado para classificar a proficiência de estrangeiros nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% são bem avaliados neste exame. Entre os não proficientes em inglês, 7% são eventualmente bem avaliados. Considere uma amostra de estrangeiros em que 18% são proficientes em inglês. Um estrangeiro, escolhido desta amostra ao acaso, realizou o exame sendo classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

- A () 73%.
- B () 70%.
- C () 68%.
- D () 65%.
- E () 64%.

Questão 13. Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ e $\gamma = \widehat{BCA}$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx \cos \alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

- A () $\alpha = 90^\circ$.
- B () $\beta = 60^\circ$.
- C () $\gamma = 90^\circ$.
- D () O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45^\circ$.
- E () O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Questão 14. No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t : x = 1$ e ao ponto $A = (3, 2)$ é igual a 4. Então, S é

- A () uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2, 1)$.
- B () uma circunferência de raio 1 e centro $(1, 2)$.
- C () uma hipérbole.
- D () uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
- E () uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Questão 15. Do triângulo de vértices A, B e C , inscrito em uma circunferência de raio $R = 2 \text{ cm}$, sabe-se que o lado \overline{BC} mede 2 cm e o ângulo interno \widehat{ABC} mede 30° . Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm , igual a

- A () $2 - \sqrt{3}$. B () $\frac{1}{3}$. C () $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D () $2\sqrt{3} - 3$. E () $\frac{1}{2}$.

Questão 16. A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

- A () 2. B () $\frac{3}{2}$. C () 1. D () $\frac{3}{4}$. E () $\frac{1}{2}$.

Questão 17. A expressão

$$\frac{2 \left[\sin \left(x + \frac{11}{2} \pi \right) + \cotg^2 x \right] \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

é equivalente a

- A () $[\cos x - \sin^2 x] \cotg x$. B () $[\sin x + \cos x] \operatorname{tg} x$. C () $[\cos^2 x - \sin x] \cotg^2 x$.
 D () $[1 - \cotg^2 x] \sin x$. E () $[1 + \cotg^2 x] [\sin x + \cos x]$.

Questão 18. Sejam C uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0, 0)$ e \overline{AB} uma corda de C . Sabendo que $(1, 3)$ é ponto médio de \overline{AB} , então uma equação da reta que contém \overline{AB} é

- A () $y + 3x - 6 = 0$. B () $3y + x - 10 = 0$. C () $2y + x - 7 = 0$.
 D () $y + x - 4 = 0$. E () $2y + 3x - 9 = 0$.

Questão 19. Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60° de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3} \text{ cm}$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3 , é igual a

- A () $\frac{416}{9} \pi$. B () $\frac{480}{9} \pi$. C () $\frac{500}{9} \pi$. D () $\frac{512}{9} \pi$. E () $\frac{542}{9} \pi$.

Questão 20. Os pontos $A = (3, 4)$ e $B = (4, 3)$ são vértices de um cubo, em que \overline{AB} é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

- A () $\sqrt{8}$. B () 3. C () $\sqrt{12}$. D () 4. E () $\sqrt{18}$.



**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
VESTIBULAR 2009**

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER
RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

Matemática

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER
RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

Questão 21. Seja S o conjunto solução da inequação

$$(x - 9) \left| \log_{x+4}(x^3 - 26x) \right| \leq 0.$$

Determine o conjunto S^C .

Questão 22. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1 + 3i) + y^2(4 - i) - x(2 + 6i) + y(-16 + 4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \operatorname{Re} w \leq -13 \text{ e } \operatorname{Im} w \leq 4 \}.$$

Questão 23. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$.

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{ f(x); x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \}$ e $f^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Questão 24. Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais a_0, a_1, \dots, a_{10} tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta, \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os $\gamma_n, n = 1, 2, \dots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$. II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$. III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

Questão 25. Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Questão 26. Sejam $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

Questão 27. Sabendo que $\operatorname{tg}^2 \left(x + \frac{1}{6}\pi \right) = \frac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi \right]$, determine $\operatorname{sen} x$.

Questão 28. Dadas a circunferência $C : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ e a reta $r : 3x - y + 5 = 0$, considere a reta t que tangencia C , forma um ângulo de 45° com r e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t .

Questão 29. Considere as n retas

$$r_i : y = m_i x + 10, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad n \geq 5,$$

em que os coeficientes m_i , em ordem crescente de i , formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q .

Questão 30. A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.